Seri bahan kuliah Algeo #13

Vektor di Ruang Euclidean
(bagian 3)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Perkalian Silang (*cross product*)

- Jika **u** = (u_1, u_2, u_3) dan **v** = (v_1, v_2, v_3) adalah dua vektor di R^3 maka perkalian silang (*cross product*) antara **u** dan **v** adalah

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Tips: $\begin{bmatrix} u_1 & \boxed{\begin{matrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{matrix}} \\ v_1 & \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} u_1 \\ v_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} u_3 \\ v_3 \end{matrix}} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} u_3 \\ v_3 \end{matrix} \end{bmatrix}$

- Perkalian silang menghasilkan vektor, perkalian titik menghasilkan skalar

Contoh 1: Misalkan **u** = (0, 1, 7) dan **v** = (1, 4, 5), maka

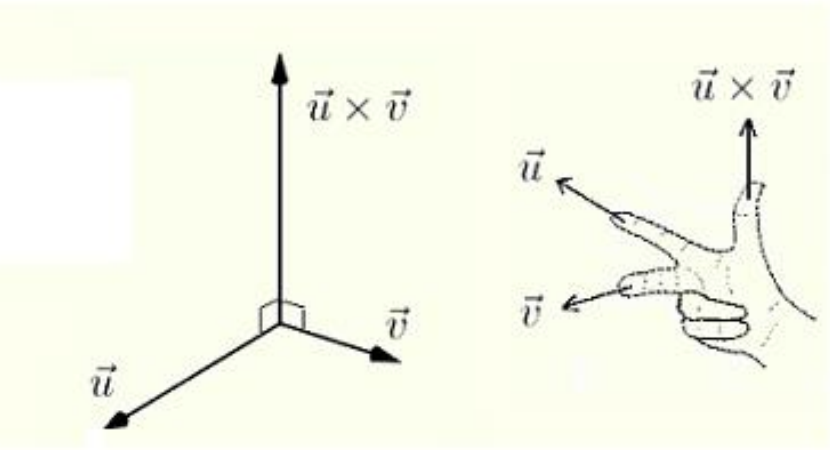
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \right)$$

= (5 – 28, –(0 – 7), 0 – 1)

=(–23, 7, –1)

- Jika $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$ maka $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$ dan $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$

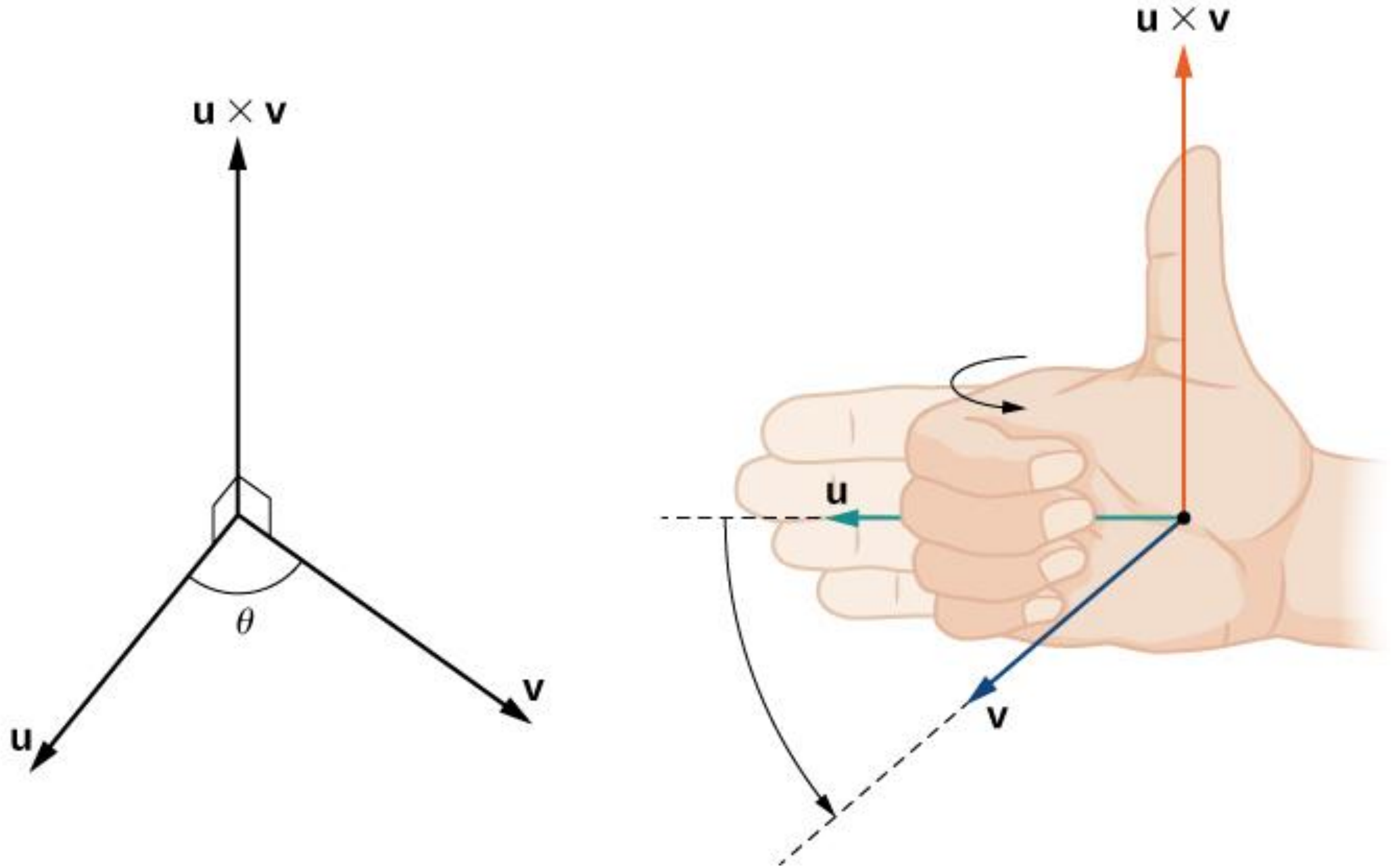


- Pada Contoh 1 sebelumnya, **u** = (0, 1, 7) dan **v** = (1, 4, 5), dan sudah dihitung:

$$\underset{\mathbf{u}}{(0, 1, 7)} \times \underset{\mathbf{v}}{(1, 4, 5)} = \underset{\mathbf{w}}{(-23, 7, -1)}$$

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = (-23, 7, -1) \cdot (0, 1, 7) = (-23)(0) + (7)(1) + (-1)(7)$$
$$= 0 + 7 - 7 = 0 \rightarrow \mathbf{w} \perp \mathbf{u}$$

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = (-23, 7, -1) \cdot (1, 4, 5) = (-23)(1) + (7)(4) + (-1)(5)$$
$$= -23 + 28 - 5 = 0 \rightarrow \mathbf{w} \perp \mathbf{v}$$



u × v
θ
u
v
u × v
u
v

Sifat-sifat Perkalian Silang

THEOREM 3.5.2 Properties of Cross Product

If $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *and* $\mathbf{w}$ *are any vectors in 3-space and* k *is any scalar, then:*

(*a*) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

(*b*) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

(*c*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(*d*) $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$

(*e*) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(*f*) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Perkalian Silang dan Perkalian Titik

THEOREM 3.5.1 **Relationships Involving Cross Product and Dot Product**

If $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *and* $\mathbf{w}$ *are vectors in 3-space, then*

(*a*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *is orthogonal to* $\mathbf{u}$)

(*b*) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *is orthogonal to* $\mathbf{v}$)

(*c*) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ (*Lagrange's identity*)

(*d*) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ (*relationship between cross and dot products*)

(*e*) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$ (*relationship between cross and dot products*)

- Menurut kesamaan Lagrange (Teorema 3.5.1(c)):

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta)^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \cos^2 \theta) \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \sin^2 \theta
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta}$$

θ adalah sudut antara **u** dan **v**

Perkalian Silang Vektor Satuan Standard

- Vektor satuan standard di R^2 adalah **i** dan **j**:

  $\mathbf{i} = (1, 0)$ dan $\mathbf{j} = (0, 1)$

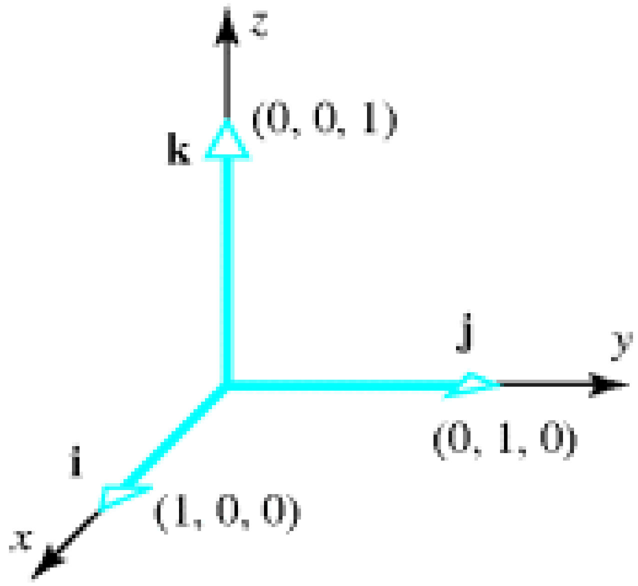
- Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ di R^2 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier

  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$

- Vektor satuan standard di R^3 adalah **i**, **j**, dan **k**:

  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, dan $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$,

- Setiap vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ di R^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi liner $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$



- Perkalian silang **i** dan **j**:   **i** = (1, 0, 0) dan **j** = (0, 1, 0), maka

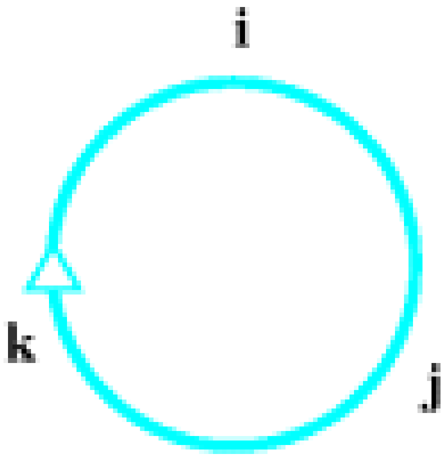
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

= (0, 0, 1) = **k**

- $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ $\quad$ $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ $\quad$ $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$

  $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ $\quad$ $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$ $\quad$ $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$



- Misalkan **u** = (u_1, u_2, u_3) = u_1**i** + u_2**j** + u_3**k**

  dan **v** = (v_1, v_2, v_3) = v_1**i** + v_2**j** + v_3**k**

  maka, dengan menggunakan ekspansi kofaktor:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Contoh 2: Lihat kembali Contoh 1,

u = (0, 1, 7) = **j** + 7**k**

v = (1, 4, 5) = **i** + 4**j** + 5**k**

maka

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

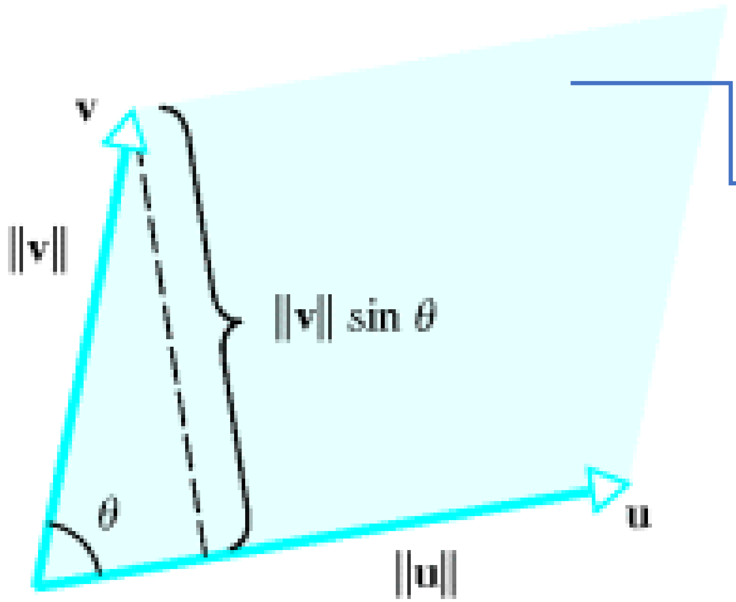
= (5 – 28)**i** – (0 – 7)**j** + (0 – 1)**k**

= –23**i** + 7**j** – **k**

Aplikasi Geometri Perkalian Silang

1. **Menghitung luas area *parallelogram***

   Parallelogram: area paralel yang dibentuk oleh dua buah vektor



Luas parallelogram = A

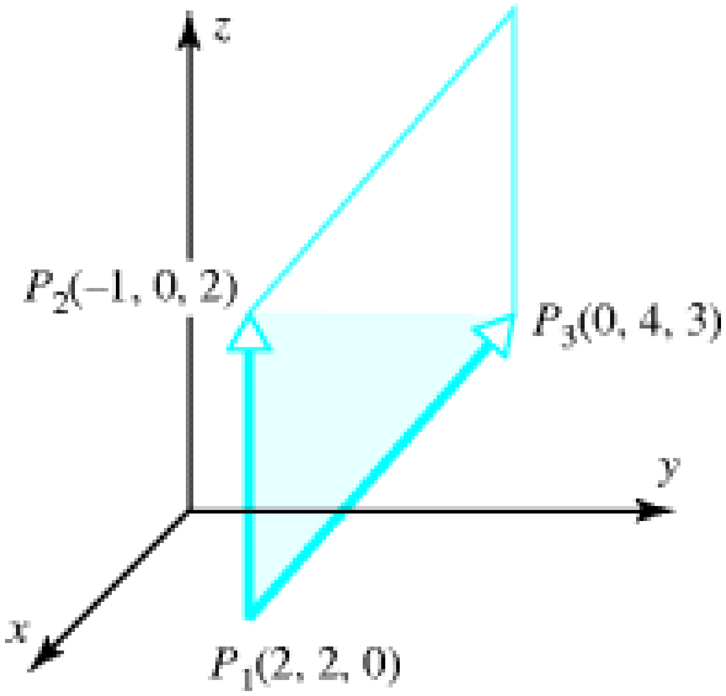
A = alas x tinggi

$= \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin \theta$

$= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ → dari kesamaan Lagrange

Jadi, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ menyatakan luas area paraleogram yang ditentukan oleh vektor **u** dan **v**

Contoh 3: Tentukan luas segitiga yang ditentukan oleh titik $P_1(2, 2, 0)$, $P_2(-1, 0, 2)$, dan $P_3(0, 4, 3)$.



Penyelesaian: luas segitiga = ½ luas parallelogram

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (-1, 0, 2) - (2, 2, 0) = (-3, -2, 2)$$

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1} = (0, 4, 3) - (2, 2, 0) = (-2, 2, 3)$$

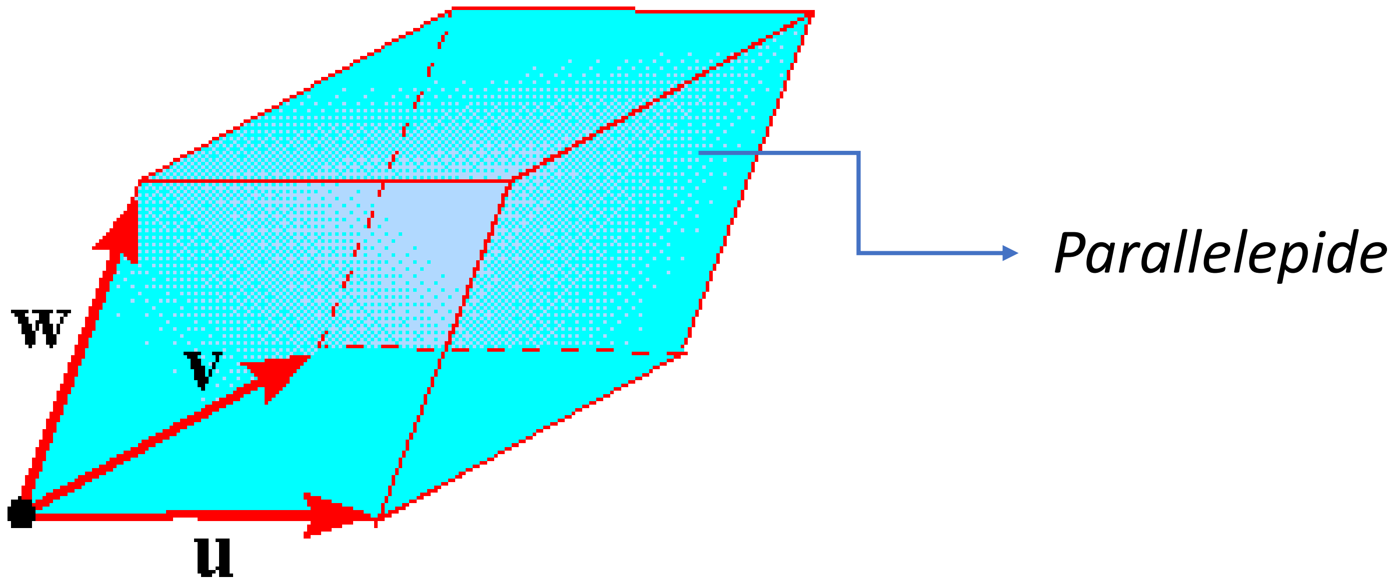
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-10, 5, -10)$$

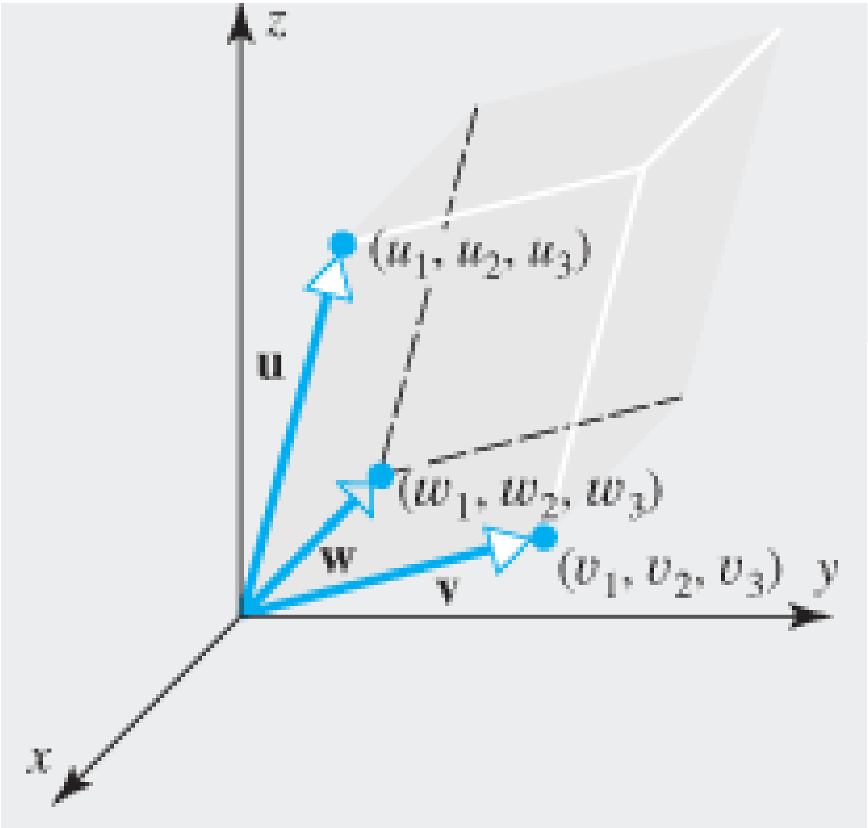
Luas parallelogram: $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{(-10)^2 + (5)^2 + (-10)^2} = \sqrt{225} = 15$

Luas segitiga $P_1P_2P_3$ = ½ (15) = 7.5

2. Menghitung volume *parallelepide*

Parallelepide: bangun tiga dimensi yang dibentuk oleh tiga buah vektor di R^3.





Tinjau tiga vektor:

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) &= \mathbf{u}\cdot\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\right) \\
&= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3 \\
&= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{determinan}
\end{aligned}$$

Nilai mutlak dari determinan, atau $|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$, menyatakan volume *parallelepiped*

Contoh 4: Tentukan volume *paralellepiped* yang dibentuk oleh tiga buah vektor **u** = 3**i** – 2**j** – 5**k**, **v** = **i** + 4**j** – 4**k**, dan **w** = 3**j** + 2**k**

Penyelesaian:

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 60 + 4 - 15$$

$$= 49$$

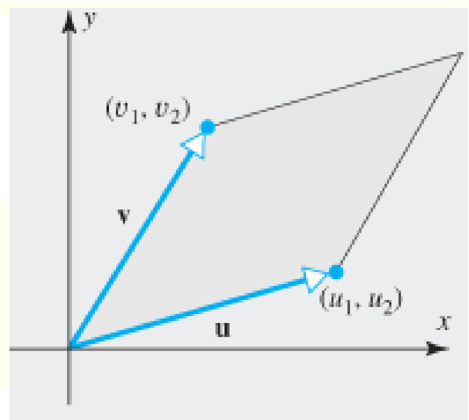
Volume parallelepiped adalah $|49| = 49$

Tafsiran Geometri Determinan

- Kembali ke determinan
- Misalkan **u** = (u_1, u_2) dan **v** = (v_1, v_2) adalah vektor-vektor di R^2. Nilai mutlak dari determinan

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

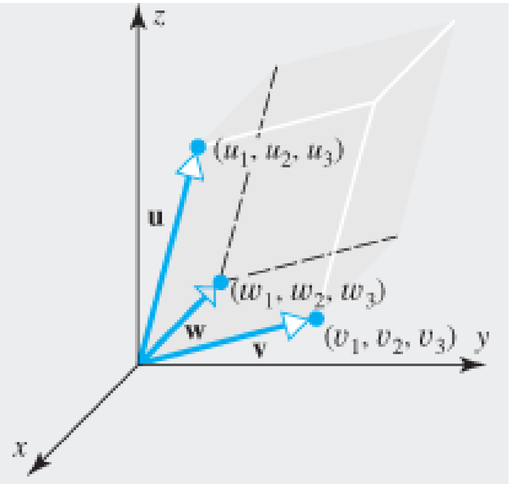
menyatakan luas *parallelogram* yang dibentuk oleh **u** dan **v**.



- Misalkan **u** = (u_1, u_2, u_3), **v** = (v_1, v_2, v_3), dan **w** = (w_1, w_2, w_3), adalah vektor-vektor di R^3. Nilai mutlak dari determinan

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

menyatakan volume *parallelepiped* yang dibentuk oleh **u, v** dan **w**.



Contoh 5: Tentukan luas *paralellogram* yang dibentuk oleh dua buah vektor **u** = 4**i** + 3**j** dan **v** = 3**i** – 4**j**

Penyelesaian:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -16 - 9 = -25$$

Luas parellogram yang dibentuk oleh **u** dan **v** adalah $|-25| = 25$

Contoh 6: Misalkan tiga buah vektor di R^3 berikut memiliki titik asal yang sama

u = (1, 1, 2) , **v** = (1, 1, 5), dan **w** = (3, 3, 1)

Perlihatkan bahwa ketiga buah vektor tersebut terletak pada satu bidang yang sama.

Penyelesaian:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = (1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(-14) - (1)(-14) + (2)(0) = -14 + 14 + 0 = 0$$

Karena determinan = 0, berarti volume *parallelpiped* = 0, dengan kata lain ketiga buah vektor tersebut terletak pada satu bidang yang sama.

TAMAT